Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Développements :

Topologie des orbites de Steinitz, Action à gauche

Bibliographie :

H2G2, OA, Mneimné-Testard, FGN, Mansuy-Mneimné, Gourdon.

Rapport du jury 2016 :

Dans cette leçon il faut présenter différentes actions (congruence, similitude, équivalence, ...) et dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites...), d'autre part des algorithmes comme le pivot de Gauss. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête. S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

Rapport du jury 2017 :

Dans cette leçon il faut présenter différentes actions (congruence, similitude, équivalence, ...) et dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites...) et d'autre part des algorithmes, comme le pivot de Gauss, méritent aussi d'être présentés dans cette leçon. Si l'on veut aborder un aspect plus théorique, il est pertinent de faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête. S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

On ne considère que des actions à gauche.

Remarque 1. *Cadre : E est un K-ev de dimension finie $n \geq 1$. On a $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ lorsque l'on parle de topologie.*

1 Action par translation

1.1 Action du groupe linéaire : pivot de Gauss

Définitions

Remarque 2 (H2G2 p128/209)**.** *Puisque $AX = Y$ équivaut à $(PA)X = PY$ pour une matrice inversible P, on peut se ramener à trouver un représentant simple de A pour l'action par translation à gauche.*

On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$ où $x \in K^n$ est l'inconnue et $A \in M_{p,n}(K)$, $b \in K^p$ sont donnés. Pour $P \in GL_p(K)$, le système est équivalent à $PAx = Pb$. Peut-on choisir P de façon à ce que PA soit simple ?

Définition 3 (H2G2 p209)**.** *Action par translation à gauche de GL_m sur $M_{m,n}$. Action à droite.*

Proposition 4 (H2G2 p209)**.** *Deux matrices sont dans la même orbite pour la translation à gauche (resp à droite) si et seulement si elles ont le même noyau (resp la même image). (Noyau : invariant complet)*

Définition 5 (H2G2,OA, Romb analyse matricielle)**.** *Matrice de dilatation, de transvection, de permutation.*

Proposition 6 (H2G2 p230)**.** *Description de l'action à gauche par des matrices d'opérations élémentaires. (Un mot sur l'action à droite).*

Matrices échelonnées

Définition 7 (H2G2 p204)**.** *Pivot. Matrice échelonnée en lignes + réduite.*

Exemple 8 (H2G2)**.**

Proposition 9 (H2G2 2018 p209)**.** *Toute matrice est dans l'orbite de l'action à gauche d'une unique matrice échelonnée réduite en lignes. On l'obtient par pivot de Gauss. Pour l'action par translation à droite, on peut ramener une matrice à une matrice échelonnée en colonnes également obtenue par pivot de Gauss.*

Proposition 10. *SI A est une matrice carrée, il existe P tel que PA soit triangulaire supérieure.*

Proposition 11 (H2G2 2018 p234)**.** *Les matrices de transvections engendrent SL_n. GL_n est engendré par les matrices de dilatations et les matrices de transvections.*

Application 12. *Résolution de systèmes linéaires. Décomposition LU. Calcul du déterminant. Calcul du rang. Calcul de l'inverse.*

Remarque 13. *L'algorithme du pivot de Gauss a une complexité en $O(n^3)$.*

Application 14. *Calcul du rang.*

Exemple 15 (Delaunay MPSI)**.**

Proposition 16. *Une matrice est inversible si et seulement si Id est dans l'orbite pour l'action par translation.*

1.2 Action des groupes orthogonal et unitaire

Remarque 17. *En restreignant à un sous-groupe, on voit que $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ agissent respectivement sur $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ par translation à gauche.*

Proposition 18 (H2G2 p202)**.** *Décomposition polaire.*

2 Action de Steinitz : matrices équivalentes

2.1 Orbites et rang

Remarque 19. *"Composée" d'une action par translation à droite et à gauche.*

Définition 20 (H2G2 2018 p5)**.** *Action par équivalence.*

Définition 21. *Deux matrices M, M' dans la même orbite pour cette action sont dites équivalentes.*

Proposition 22. *M et M' sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans deux paires de bases différentes.*

Proposition 23 (H2G2 2018 p6)**.** *[Théorème du rang] Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même rang. Dans ce cas, elles sont équivalentes à $I_{r,n-r}$.*

Application 24 (Romb p158)**.** *Tout hyperplan de M_n contient au moins une matrice inversible.*

Application 25 (OA p155)**.** *$rg(A) = rg(A^t)$.*

Application 26 (OA p156)**.** *Soit k un sous-corps de K. Deux matrices de $M_{n,m}(k)$ équivalentes dans $M_{n,m}(K)$ le sont dans $M_{n,m}(K)$.*

Proposition 27 (H2G2 2018 p10)**.** *Nombre de matrices de $M_{m,n}(F_q)$ de rang r. (formule fausse ? cf Adrien Laurent.)*

Proposition 28 (H2G2 2018 p11)**.** *Ces orbites ne sont pas fermées : Il existe des matrices de rang r aussi proches que l'on veut de la matrice nulle. Ainsi, le rang n'est pas continu.*

2.2 Topologie des orbites

Proposition 29 (H2G2)**.** *L'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r de $M_{n,m}(K)$ est l'ensemble des matrices de rang $\leq r$. (Adhérence de l'ensemble des orbites de rang r.)*

Application 30. *$GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$.*

Application 31 (H2G2 p11)**.** *La seule orbite fermée est l'orbite minimale $O_0 = \{0\}$.*
La seule orbite ouverte est l'orbite maximale $O_{min(n,m)}$. En particulier, $GL_n(K)$ est ouvert.

Application 32 (H2G2 p11)**.** *Le rang n'est pas une application continue sur $M_{n,m}(K)$.*

Proposition 33 (H2G2)**.** *Il est semi-continu inférieurement. Si (A_n) une matrice de rang r qui converge vers une matrice B alors $rang(B) \leq r$.*

Contre exemple 34. *$A_n = 1_n I_r$.*

Application 35 (Mneimné Testard p36)**.** *[H2G2 p30] Pour $K = \mathbb{C}$, O_r est connexe.*

Proposition 36 (FGN p217)**.** *O_r est d'intérieur vide.*

3 Action par conjugaison : matrices semblables et réduction

Remarque 37. *Tout le problème de la réduction consiste en trouver une base dans laquelle un endomorphisme admet une forme simple. Le changement de base est plus contraignant que l'action de Steiniz, mais les propriétés opératoires sont meilleures et les orbites plus représentatives de l'endomorphismes : l'action est un morphisme de groupes.*

3.1 Définitions

Définition 38 (H2G2 2018 p122)**.** *Action par conjugaison*

Remarque 39 (Gourdon p121)**.** *Cette action s'interprête comme un changement de bases. Si A et B sont semblables, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.*

Proposition 40 (H2G2 2018 p122)**.** *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles sont dans la même orbite. L'orbite est appelée classe de similitude.*

Proposition 41. *Si A et B sont dans la même orbite, alors A et B ont même rang, même déterminant, même polynôme caractéristique, même polynôme minimal.*

Contre exemple 42. *I_2 et $(1,1;0,1)$*
$(1,1;0,2)$ et $(1,1;0,1)$ ne sont pas semblables

Remarque 43. *On va se concentrer sur les corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour la classification des orbites.*

3.2 Action sur l'ensemble des matrices diagonalisables

Proposition 44 (H2G2 2018 p141)**.** *L'action stabilise l'ensemble des matrices diagonalisables.*

Proposition 45. *Une matrice est diagonalisable si et seulement si son orbite contient une matrice diagonale. (Action très importante en théorie de la réduction.)*

Proposition 46 (H2G2 2018 p123)**.** *Le polynôme caractéristique, le spectre sont des invariants totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.*

Contre exemple 47 (H2G2 2018 p123)**.** *Le polynôme minimal est un invariant mais pas total.*

Proposition 48 (H2G2 p86)**.** *Une matrice complexe est diagonalisable si et seulement si son orbite est fermée.*

3.3 Action sur l'ensemble des matrices nilpotentes : réduction de Jordan

Proposition 49 (H2G2 p87)**.** *L'action par conjugaison stabilise l'ensemble des matrices nilpotentes.*

Définition 50 (H2G2 p87)**.** *Suite des noyaux itérées.*

Proposition 51 (H2G2 p88)**.** *Inclusion des noyaux.*

Définition 52 (H2G2)**.** *Partition d'un entier et tableau de Young associé, partition duale.*

Proposition 53. *Théorème de Jordan.*

Remarque 54. *Nombre de blocs de Jordan de taille k pour $k \in \mathbb{N}$.*

Exemple 55.

Proposition 56. *Deux endomorphismes nilpotents sont semblables ssi ils ont même réduite de Jordan : les réduites de Jordan forment donc un système de représentants des orbites.*

Application 57. *Le nombre de classes d'équivalence de matrices nilpotentes de $M_n(K)$ est égal au nombre de partitions de l'entier n.*

Application 58 (Gourdon p201)**.** *Sur un corps algébriquement clos, M est semblable à λM pour un $\lambda \in K$ si et seulement si M est nilpotente.*

Proposition 59 (OA)**.** *Une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est dans l'adhérence de sa classe de similitude.*

3.4 Cas général : classification des orbites et invariants de similitude

Proposition 60 (Gourdon p158)**.** *Deux matrices sont semblables sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elles le sont sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 61. *Sur un corps algébriquement clos, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Proposition 62 (H2G2 ?)**.** *L'orbite de A pour l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ est exactement l'intersection de l'orbite de A pour l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ intersectée avec $M_n(\mathbb{R})$.*

Remarque 63. *Par la réduction de Jordan générale, Les classes de similitude de matrices trigonalisables sont caractérisées par les blocs de Jordan.*

Contre exemple 64. *$Diag(J_2(0), 0, 0)$ $etDiag(J_2(0), J_2(0))$ sont triangulaires supérieures, ont même polynôme minimal, même polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables.*

Proposition 65. *Soit $A = D + N$ et $A' = D' + N'$ les décompositions de Dunford des matrices A et A', alors A et A' sont dans la même orbite si et seulement si D et D' sont semblables et si pour toute valeur propre λ de A (et donc de A'), N_λ et N'_λ ont la même forme de Young. (cf Julien pour plus de détails)*

Proposition 66 (Gourdon p292)**.** *Dans $M_n(\mathbb{R})$, $n = 2$ ou 3, deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même polynome caractéristique et même polynôme minimal. Faux si $n \geq 4$. (Ici ?)*

Théorème 67 (Gourdon p291)**.** *Décomposition de Frobenius.*

Proposition 68 (Gourdon p291)**.** *Les invariants de similitude constituent un invariant total de similitude.*

Exemple 69 (Gourdon ?)**.** *Caractérisation des invariants de similitude en dimension 2 ou 3.*

Exemple 70 (Mansuy)**.** *La réduite de Frobenius de diag$(C_{X^2}, C_{X^2+1}$ est $C_{X^2(X^2+1)}$.*

Proposition 71. *Toute matrice est semblable à sa transposée.*

Exemple 72 (Mansuy)**.** *Invariants de similitude d'un nilpotent.*

Remarque 73. *On retrouve la réduction de Jordan.*

Remarque 74. *Certains parlent de réduction des endomorphismes normaux.*

4 Action par congruence : matrices congruentes et classification des formes quadratiques

Remarque 75. *Les corps sur lesquels ont travaille sont de caractéristique différentes de 2.*

4.1 Action de $Gl_n(K)$ sur $S_n(K)$; classification des orbites

Définition 76 (H2G2)**.** *Action par congruence sur S_n. Matrices congruentes.*

Remarque 77. *Deux matrices sont congruentes si elles représentent la même forme quadratique.*

L'équivalence des formes quadratiques revient à la congruence des matrices de leur forme polaire (dans une base donnée).

Pour q une forme quadratique sur K de forme polaire A, les formes quadratiques équivalentes à q sont les formes quadratiques dont la forme polaire B est congruente à A.

Les matrices représentant une même forme quadratique constituent une classe de congruence dans $S_n(K)$.

Remarque 78. *Cette action s'interprête comme un changement de base pour l'application bilinéaire de matrice M.*

Proposition 79 (H2G2 p253)**.** *Théorème d'inertie de Silvester.*

Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.

Proposition 80 (Gourdon, Rombaldi)**.** *Méthode de Gauss.*

Application 81. *Il y a $n+1$ orbites pour l'action sur $S_n(\mathbb{C})$.*

Il y a $n+1$ classes d'équivalences de formes quadratiques non-dégénérées sur R^n. Il y a $(n+1)(n+2)/2$ orbites pour l'action sur $S_n(\mathbb{R})$.

Application 82. *Signature. En parler ?*

Application 83. *Classification des coniques non dégénérées.*

Théorème 84 (H2G2 2018 p254)**.** *Théorème de classification sur les corps classiques.*

Application 85 (H2G2)**.** *Loi de réciprocité quadratique.*

4.2 Etude de quelques stabilisateurs

Définition 86 (H2G2 2018 p264)**.** *Groupe d'isotropie/orthogonal. $O_n(q) = stab(A)$ où A est la matrice bilinéaire symétrique de la forme quadratique q.*

Définition 87 (H2G2 p259 265)**.** *$O_n(K)$ comme stabilisateurs de I_n dans $GL_n(K)$. $O_{p,q}(\mathbb{R})$ comme stabilisateur de $I_{p,q}$.*

Remarque 88 (H2G2 p259)**.** *Dans le cas réel, on peut ramener l'étude des groupes d'isotropie à celles des groupes O_n et $O_{p,q}$. Donc on n'étudie que ceux là car les stabilisateurs sont congruents pour deux matrices associées congruentes.*

Définition 89 (H2G2 p258)**.** *S_n^{++} comme orbite de I_n.*

Proposition 90 (H2G2 p265)**.** *Si deux formes quadratiques sont dans la même orbite pour l'action de congruence alors $O(q)$ et $O(q')$ sont isomorphes.*

Proposition 91. *Etude de $O(p,q)$.*